Kwantumlogica

Elementaire deeltjes gedragen zich niet op klassieke wijze. Zij gedragen zich afhankelijk van de omstandigheden als deeltje of als golf. Een meting van de eigenschappen van een dergelijk object kan de bruikbaarheid van de meting van een andere eigenschap teniet doen. Door dit gedrag wordt duidelijk dat deze objecten zich niet houden aan de klassieke logica die wij gewend zijn. Zij gehoorzamen niet aan de modulaire wet. De deeltjes gehoorzamen wel aan een verzwakte versie van deze wet. De verzameling van de uitspraken in een klassiek logisch systeem is gelijkvormig met een ortho-gecomplementeerd en modulair tralie. De verzameling van de Venn diagrammen heeft dezelfde structuur en biedt een mooie gelegenheid om deze structuur grafisch af te beelden. De verzameling van de uitspraken over een kwantum-logisch systeem vormt een orthomodulair tralie. Hiervoor bestaat geen eenvoudige grafische weergave. Deze structuur is dan ook aanmerkelijk ingewikkelder. Er bestaat wel een redelijk bevattelijk wiskundig model dat dezelfde structuur heeft. Dat is de verzameling van de gesloten deelruimten van een aftelbaar oneindige Hilbertruimte. Dit is de voornaamste reden dat kwantumfysica gebruikelijk met behulp van een Hilbertruimte bedreven wordt. De Hilbertruimte dankt zijn zwak modulair gedrag voornamelijk aan het bestaan van Fouriertransformaties en andere vormen van verstrooiing van informatie. Dergelijke transformaties komen in de Hilbertruimte in velerlei vorm voor.

Tralies

Een tralie is een verzameling van elementen a, b, c, … die afgesloten is voor de relaties $\cap$ en $\cup$. Deze relaties voldoen aan:

- De verzameling kent een half ordening $\subset$. Bij elk paar elementen a, b behoort een element c zodat $a \subset c$ en $b \subset c$.
- De verzameling is een $\cap$ half tralie als bij elk paar elementen a, b een element c bestaat, zodat $c = a \cap b$.
- De verzameling is een $\cup$ half tralie als bij elk paar elementen a, b een element c bestaat, zodat $c = a \cup b$.
- De verzameling is een tralie als deze zowel $\cap$ half tralie als $\cup$ half tralie is.

De volgende relaties gelden in een tralie:

$$a \cap b = b \cap a \tag{A1}$$
$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) \tag{A2}$$
$$a \cap (a \cup b) = a \tag{A3}$$

$$a \cup b = b \cup a \tag{A4}$$
$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) \tag{A5}$$
$$a \cup (a \cap b) = a \tag{A6}$$

Het tralie heft een half ordening met de inclusie $\subset$:

$$a \subset b \Leftrightarrow a \cap b = a \tag{A7}$$

Een complementair tralie bevat twee elementen n en e en bij elk element a een complementair element a’ zodat:

$$a \cap a' = n \tag{A8}$$
$$a \cap n = n \tag{A9}$$
$$a \cap e = a \tag{A10}$$

$$a \cup a' = e \tag{A11}$$
$$a \cup e = e \tag{A12}$$
$$a \cup n = a \tag{A13}$$

Een orthocomplementair tralie bevat twee elementen n en e en bij elk element a een element a” zodat:

$$a \cup a'' = e \tag{A14}$$
$$a \cap a'' = n$$
$$(a'')'' = a \tag{A15}$$
$$a \subset b \Leftrightarrow b'' \subset a'' \tag{A16}$$

e is het eenheidselement; n is het nulelement van het tralie

Een distributief tralie ondersteunt de distributieve wetten:

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) \tag{A17}$$
$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \tag{A18}$$

Een modulair tralie ondersteunt:

$$(a \cap b) \cup (a \cap c) = a \cap (b \cup (a \cap c)) \tag{A19}$$

Een zwak modulair tralie ondersteunt daarentegen:

Er bestaat een element d zodat

$$a \subset c \Leftrightarrow (a \cup b) \cap c = a \cup (b \cap c) \cup (d \cap c) \tag{A20}$$

waarbij d voldoet aan:

$$(a \cup b) \cap d = d \tag{A21}$$
$$a \cap d = n \tag{A22}$$
$$b \cap d = n \tag{A23}$$
$$[(a \subset g) \text{ en } (b \subset g)] \Leftrightarrow d \subset g \tag{A24}$$

In een atomair tralie geldt

$$\exists_{p \in L} \forall_{x \in L} \{x \subset p \Rightarrow x = n\} \tag{A25}$$

$$\forall_{a \in L} \forall_{x \in L} \{(a < x < a \cap p) \Rightarrow (x = a \text{ or } x = a \cap p)\} \qquad \text{(A26)}$$

p is een atoom

Zowel de verzameling van de uitspraken van een kwantum-logisch systeem als de verzameling van de gesloten deelruimten van een aftelbaar oneindige Hilbertruimte bezitten de structuur van een orthomodulair tralie. In dit opzicht zijn deze verzamelingen dus gelijkvormig (tralie-isomorf).
In de Hilbertruimte is een atoom een zuivere toestand (een straal die opgespannen wordt door één enkele vector).

Klassieke logica heeft de structuur van een orthocomplentair distributief, modulair en atomair tralie. Kwantumlogica heeft de structuur van een orthomodulair tralie. Dat is een orthocomplementair, zwak modulair en atomair tralie. De verzameling van de gesloten deelruimten van een aftelbaar oneindig dimensionale Hilbertruimte heeft ook deze traliestructuur.

Propositie

In de Aristoteliaanse logica is een propositie een special type zinsnede, die een predicaat over een onderwerp bevestigt of ontkent. Proposities hebben binaire waarden. Ze zijn waar of fout.

Proposities hebben de volgende vorm "*Dit is een deeltje of een golf*". In de kwantumlogica is "*Dit is een deeltje*" juist geen propositie.

In de wiskundige logica worden proposities, ook wel "propositionele formules" of "uitspraak vormen" genoemd. Het zijn uitspraken, welke geen kwantoren bevatten. Zij zijn samengesteld uit goed gevormde formules die geheel uit atomaire formules, de vijf logische verbindingen en groeperingssymbolen zoals haakjes bestaan. De propositielogica is een van de weinige wiskunde gebieden die volledig opgelost zijn in die zin dat het bewezen is dat deze logica intern consistent is, elke stelling juist is en elke ware uitspraak bewezen kan worden.
Predicaten logica is een uitbreiding van de propositielogica. Zij voegt variabelen en kwantoren toe.

Als een propositie in de Hilbertruimte op zijn waarheid of bruikbaarheid getest wordt, dan moet deze uitspraak eerst naar de Hilbertruimte vertaald worden. In de Hilbertruimte bevindt een vector zich ofwel binnen een gesloten deelruimte of hij ligt daarbuiten. In deze omgeving is een nette kwantum-logische propositie: "*Vector |f> ligt binnen de deelruimte die object A vertegenwoordigt*".

In de Hilbertruimte, correspondeert een atomaire propositie met een deelruimte die door een enkele vector opgespannen wordt. Als deze vector een eigenvector van een operator is, dan vertegenwoordigt de betreffende eigenwaarde tevens een attribuut in de atomaire propositie.

Predicaten kunnen attributen en kwantoren accepteren. De predicatenlogica wordt ook wel eerste rangs logica genoemd. Een dynamische logica kan het feit verwerken dat predicaten elkaar beïnvloeden wanneer atomaire proposities binnen een predicaat verwisseld worden.

Waarnemen

In de natuurkunde, vooral in de kwantumfysica, is een waarneembare grootheid een eigenschap van een system, waarbij de waarneming eventueel door een rij van opeenvolgende handelingen voorbereid en bepaald wordt. Het is goed om onderscheid te maken tussen meten en waarnemen. Onder dat laatste valt ook ervaren.

- Bij een waarneming wordt de toestand van het geobserveerde ding beschouwd als een lineaire combinatie van eigenvectoren van de operator die met de waarneembare grootheid verbonden is.
- Een meting verandert de toestand van het waargenomen object via een transformatie zodat deze overeenkomt met een van de eigenvectoren van de operator die overeenkomt met de waarneembare grootheid. Wat er gebeurt wordt bepaald door de eigenschappen van de meetapparatuur. De meting kan gezien worden als een combinatie van een voorbereiding en een waarneming.

Afhankelijk van de toestand van het waar te nemen object en de kenmerken van de meetapparatuur kunnen meting en waarneming hetzelfde resultaat geven.

Met deze interpretatie van het concept waarneming is het mogelijk om kwantumobjecten elkaars toestand te laten ervaren. Meestal zal het de natuurlijke waarnemer aan voldoende apparatuur ontbreken om de waarneming via een transformatie voor te bereiden. In de natuur zullen metingen relatief zelden voorkomen.

Dynamische logica

De huidige trend in kwantum-logisch onderzoek is het toevoegen van axioma's, welke het statische karakter van de traditionele kwantumlogica in een meer dynamische en operationele logica.
"Logic of quantum actions" (LQA) voegt unitaire transformaties als bron van dynamica toe. Grondig onderzoek laat zien dat unitaire transformaties zonder extra maatregelen zelfs niet in staat zijn om dynamiek in voldoende mate te genereren. Manipulatoren kunnen dat wel. Deze transformaties zijn echter niet de echt fundamentele veroorzakers van dynamiek. De velden die samengaan met de bewegingen van objecten vormen de echte bronnen van dynamica. Zij vormen de motor achter de acties van de manipulatoren. Aan hun bestaan kan zelfs een interpretatie in logische termen gegeven worden. Deze is verbonden met de wanordelijkheid van de vervanging van atomaire proposities in een omvangende propositie. Zover ik weet zijn deze invloeden nog in geen enkele dynamische versie van logica verwoord.